إجابة

(٥)

سلم تصحيح مقرر (نظرية جبور لي)
السنة الرابعة رياضيات (ب)
الفصل التكميلي ٢٠١٥ - ٢٠١٦
السؤال الأول (٢٠ = ٤ + ٦ + ١٠)

١- نسمي كل تطبيق $d : A \to A$ تطبيق اشتقاق إذا حقق الشرط التالي: أياً كان $x, y \in A$ و $\alpha \in R$ فإن: $d(x+y) = d(x) + d(y)$ ، $d(\alpha x) = \alpha d(x)$ ، $d[x,y] = [d(x), y] + [x, d(y)]$ إجابة

٢- ليكن $x, y \in A$ إذا كان $x = y$ عندئذٍ يكون

$$d_a(x) = [a,x] = [a,y] = d_a(y)$$

$$d_a(x+y) = [a, x+y] = [a,x] + [a,y] = d_a(x) + d_a(y)$$

$$d_a(\alpha x) = [a, \alpha x] = \alpha [a,x] = \alpha \cdot d_a(x)$$ إجابة

$$d_a([x,y]) = [a,[x,y]] =$$

وبالتالي

$$[a,[x,y]] + [x,[y,a]] + [y,[a,x]] = 0$$

نجد أن

$$d_a([x,y]) = [x,[a,y]] + [[a,x],y]$$

$$= [d_a(x), y] + [x, d_a(y)]$$

ومنه d_a هو تطبيق اشتقاق.

٣- ليكن $a, b \in A$ بحيث $a = b$ عندئذٍ أياً كان $x \in A$ فإن $[a,x] = [b,x]$ ومنه نجد أن $d_a(x) = d_b(x)$ وبالتالي $d_a = d_b$ ومنه فإن $\psi(a) = \psi(b)$ وبالتالي فإن ψ تطبيق. الآن

$$\psi(a+b) = d_{a+b} , \ \forall x \in A ; \ d_{a+b}(x) = [a+b, x]$$

$$= [a,x] + [b,x] = d_a(x) + d_b(x) = (d_a + d_b)(x)$$

$$d_{a+b} = d_a + d_b , \quad \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$$ ومنه إجابة

$$\psi(\alpha a) = d_{\alpha a} , \ \forall x \in A , \ d_{\alpha a}(x) = [\alpha a, x] = \alpha [a,x]$$

$$= \alpha d_a(x) , \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a , \quad \psi(\alpha a) = \alpha \psi(a)$$

$$\psi([a,b]) = d_{[a,b]} , \ \forall x \in A , \ d_{[a,b]}(x) = [[a,b],x]$$

وبالتالي

$$[x,[a,b]] + [a,[b,x]] + [b,[x,a]] = 0$$

نجد أن

$$d_{[a,b]}(x) = [[a,b],x] = -[x,[a,b]] = [a,[b,x]] + [b,[x,a]]$$

$$= [a, d_b(x)] + [b, -[a,x]] = [a, d_b(x)] + [[a,x], b] =$$

$$= [d_a(x), b] + [a, d_b(x)] = d_a(d_b(x)) - [b, d_a(x)] =$$

$$= d_a d_b(x) - d_b d_a(x) = (d_a d_b - d_b d_a)(x) =$$

$$= [d_a, d_b](x) , \quad d_{[a,b]} = [d_a, d_b]$$

$$\psi([a,b]) = d_{[a,b]} = [\psi(a), \psi(b)]$$

وبالتالي ψ تشاكل.

السؤال الثاني: (٤ د، ٧ = ٢ + ٢ + ٣)

I- نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية I إنها مثالي مميز في A إذا كان مودول جزئي في A وإن $d(I) \subseteq I$ أيا كان $d \in Der(A)$

نقول عن مثالي B إنه تام في A إذا كان $Z(B)=0$ وكان $Der(B)=Inn(B)$.

١- واضح أن $\phi \neq Z(B) \subset B$ حيث $0 \in B$ وإن $[0,x]=0$ أيا كان $x \in B$.

ليكن $a,b \in Z(B)$ عندئذ أيا كان $x \in B$ فإن $[a-b,z]=[a,z]-[b,z]$

أي $a-b \in Z(B)$ أيضا أيا كان $\alpha \in R$ فإن $[\alpha a,z]=\alpha[a,z]=0$

وبالتالي $\alpha a \in Z(B)$ كما أن $d(a) \in Z(B)$ وذلك لأن

$[d(a),z]=d[a,z]-[a,d(z)]=0$

ومنه فإن $Z(B)$ مثالي مميز في A

٢- لنفرض أن المثالي B قابل للحل في A عندئذ فإن $B+J(A)$ يكون قابل للحل في A. ومنه فإن جذري $\frac{B+J(A)}{B}$ قابل للحل في A/B

ويكون A/B نصف بسيط نجد أن $B+J(B)=B$ وبالتالي يكون $J(A) \subseteq B$

ولكن $J(A)$ المثالي البسيط قابل للحل في A نجد أن $B \subseteq J(A)$ ومنه $B=J(A)$.

٣- سنبرهن أولاً أن $A=B \oplus Z_A(B)$. إن كلاً من $B, Z_A(B)$ هو مثالي في A ومنه فإن $B+Z_A(B)$ مثالي في A وبالتالي $B+Z_A(B) \subseteq A$. من جهة أخرى بما أن B تام فإن $Z(B)=0$ وإن $Der(B)=Inn(B)$. ليكن $a \in A$ عندئذ يوجد تطبيق اشتقاقي $d_a \in Inn(A)$ معرف بـ $d_a(x)=[a,x]$ أيا كان $x \in A$.

لنأخذ مقصور d_a على B ولنرمز له d_a نجد $d_a : B \to A$ وإن B مثالي في A فإن $d_a(B) \subseteq B$ وأيا كان $x \in B$ فإن $d'_a(x)=d_a(x) \in B$ ومنه $d'_a : B \to B$

كما أن d'_a تطبيق اشتقاقي على B (مع البرهان) ومنه $d'_a \in Inn(B)=Der(B)$

ومنه أيا كان $a \in A$ يوجد $b \in B$ بحيث $d_a=d_b$ على B ومنه أيا كان $x \in B$ فإن $d_a(x)=d_b(x)$ أي أن $[a,x]=[b,x]$ ومنه $[a-b,x]=0$ ومنه $a-b \in Z_A(B)$ وبالتالي $a \in B+Z_A(B)$ أي أن $A \subseteq B+Z_A(B)$

ومنه $A=B+Z_A(B)$ ولكن $B \cap Z_A(B) \subseteq Z(B)=0$ نجد أن $A=B \oplus Z_A(B)$

السؤال الثالث: (٦ د)

لنفرض أن $\{e_1,e_2\}$ قاعدة لـ A فوق K. عندئذٍ الشرط:

الحالة الأولى - إذا كان $[e_1,e_2]=ce_1$ حيث $c \in K$ عندئذ أيا كان $z \in DA$ يوجد $x,y \in A$ بحيث $z=[x,y]$ وإن $x=\alpha e_1+\beta e_2 , y=\alpha_1 e_1+\beta_1 e_2$

ومنه $z=[x,y]=(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)ce_1=\lambda e_1$

أي أن DA مولد بعنصر واحد. ليكن $z \in D^2A$ عندئذ $z=[x,y]$ حيث $x,y \in DA$ ومنه $x=c_1e_1 , y=c_2e_2$ وبالتالي

$z=c_1c_2[e_1,e_1]=0$

أي أن $D^2A=0$ ومنه A قابل للحل.

الحالة الثانية: إذا كان $[e_1,e_2]=c_1e_1+c_2e_2$ حيث $c_1,c_2 \in K$. لنفرض أن

$e'_1=c_1e_1+c_2e_2 , e'_2=c_1e_1-c_2e_2$

فتصبح $\{e'_1,e'_2\}$ جملة مستقلة خطياً (مع البرهان) ومنه أيضاً $\{e'_1,e'_2\}$ قاعدة للجبر A. ليكن $z \in DA$ عندئذ $z=[x,y]$ حيث $x,y \in A$ ومنه وإن

$x=\alpha e'_1+\beta e'_2 , y=\alpha_1 e'_1+\beta_1 e'_2$

$[x,y]=(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)[e'_1,e'_2]=2c_1c_2e'_1$

ج- بما أن DA حقل لجبر واحد. لتكن $z \in D^2A$ حيث أن $z=[x,y]$
حيث $x=\mu e'_1, y=\lambda e'_1$ ومنه $z=\mu\lambda[e'_1,e'_1]=0$
إذن $D^2A=0$ أي أن A قابل للحل
السؤال الرابع: (أ، ب، ج ...)
١- لتكن B مثالي في A. لنعرف التطبيق الطبيعي $f: A \to A/B$ بالشكل الآتي: لكل $a\in A$ فإن $f(a)=a+B$ نبرهن أن f تطبيق خطي: إذا كان $a,b\in A$ حيث $a=b$ نجد أن $f(a)=a+B=b+B=f(b)$ وهو تطبيق أيضاً

$$f(a+b)=(a+b)+B=(a+B)+(b+B)=f(a)+f(b)$$
$$f(a.b)=a.b+B=(a+B)(b+B)=f(a).f(b)$$
$$f(\alpha a)=\alpha a+B=\alpha(a+B)=\alpha f(a)$$

ب- نبرهن أن f شامل، نبرهن أن f غامر. إذا كان $d+B\in A/B$ فإن $d\in A$ وأن $f(d)=d+B$. الآن نبرهن $B=\ker f$ إذا كان $a\in\ker f$ فإن $f(a)=a+B=B$ أي أن $a\in B$ ومنه $\ker f\subseteq B$ العكس إذا كان $b\in B$ فإن $b\in A$ وأن $f(b)=b+B=B$ ومنه $b\in\ker f$.

ج- نبرهن أن $N=\{x: x\in A, x+B\in\bar N\}$. إذن $\emptyset\neq N\subset A$ لأن $0\in A$
ليكن $x,y\in A$ و $\alpha,\beta\in R$ نفرض $\alpha(x+B),\beta(y+B)\in\bar N$ ومنه
$$(\alpha x+\beta y)+B=\alpha(x+B)+\beta(y+B)\in\bar N$$
إذن $\alpha x+\beta y\in N$ أيضاً
$$(x+B).(y+B)\in\bar N \Rightarrow x.y\in\bar N$$
الجواب: لأن N جبر جزئي من A ويحوي B لأنه إذا كان $b\in B$ فإن
$b+B=B\in\bar N$ $\quad b\in N$
وإذا كان $x\in N$ و $b\in B$ فإن $xb, bx\in B$ لأن B مثالي
ومنه $\frac{N}{B}$ جبر جزئي من R. لنبرهن أن $\bar N=\frac{N}{B}$ إذا كان $\bar x\in\bar N$ فإن
$\bar x=a+B$ حيث $a\in N$ ومنه $\bar x\in\frac{N}{B}$ وبالتالي $\bar N\subseteq\frac{N}{A}$. بالعكس
$y+B\in\frac{N}{B}$ نستنتج $y\in N$ أي أن $y+B\in\bar N$ ومنه $\frac{N}{B}\subseteq\bar N$ إذن $\bar N=\frac{N}{B}$